8.4 - Improper Integrals - Ifinite Integrand

(1) $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = \lim_{t\to 1^+} \int_t^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$

let $u = x-1$
$du = dx$

$= \lim_{t\to 1^+} \int \frac{du}{u^{1/3}} = \lim_{t\to 1^+} \int u^{-1/3}du$

$= \frac{3u^{2/3}}{2}$

$= \left.\frac{3(x-1)^{2/3}}{2}\right|_t^3$

$\frac{3}{2}(2)^{2/3} - \frac{3}{2}(t-1)^{2/3}$

$\lim_{t\to 1^+} \frac{3(2)^{2/3}}{2^1} - \frac{3}{2}(t-1)^{2/3} = 3(2)^{2/3-1} - \frac{3}{2}(0)^{2/3}$ (*)

(*) $\frac{x^b}{x^a} = x^{b-a}$

$\therefore \frac{2^{2/3}}{2^1} = 2^{2/3-1}$

$= 2^{-1/3}$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$= \frac{2}{\sqrt[3]{2}} - 0$

$\boxed{\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{2} \text{ (rationalized)}}$

8.4

(8) $\int_5^{-5} \frac{1}{x^{2/3}}\,dx = \lim_{b\to 0^+} \int_5^b \frac{dx}{x^{2/3}} + \lim_{b\to 0^-} \int_b^{-5} \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$

$= \lim_{b\to 0^+} \int_5^b x^{-2/3}\,dx + \lim_{b\to 0^-} \int_b^{-5} x^{-2/3}\,dx$

$= \lim_{b\to 0^+} 3x^{1/3} \Big|_5^b + \lim_{b\to 0^-} 3x^{\frac{1}{3}} \Big|_b^{-5}$

$\lim_{b\to 0^+} \left(3b^{1/3} - 3\sqrt[3]{5}\right) + \lim_{b\to 0^-} 3\sqrt[3]{-5} - 3\sqrt[3]{b}$

$= 0 - 3\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{-5} - 0$

$= -3\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{5}$

$= -3\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5}$

$= \boxed{-6\sqrt[3]{5}}$